Sr. No. 011304

December 2023

B. Tech (IT/CE (Hindi Medium)/CE/CSE/CSE (AIML)) – III SEMESTER

Mathematics III (Calculus and Ordinary Differential Equations)(BSC-301)

Time: 3 Hours **Max. Marks: 75**

Instructions:
1. *It is compulsory to answer all the questions (1.5 mark each) of Part -A in short.*
2. *Answer any four questions from Part -B in detail.*
3. *Different sub-parts of a question are to be attempted adjacent to each other.*

PART –A

Q1 (a) Write the type of the sequence {-1, 1, -1, 1,...}. Is it convergent? (1.5)

अनुक्रम {-1, 1, -1, 1,...} का प्रकार लिखिए। क्या यह अभिसरण है?

(b) What is positive term series? (1.5)

धनात्मक शब्द श्रृंखला क्या है?

(c) Test $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ exists or not. (1.5)

परीक्षण करे $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ मौजूद है या नहीं।

(d) If $u = (x-y)(y-z)(z-x)$, then find $\frac{\partial u}{\partial y}$. (1.5)

यदि $u = (x-y)(y-z)(z-x)$, तो $\frac{\partial u}{\partial y}$ ज्ञात कीजिए।

(e) Evaluate $\int_0^1 \int_0^1 x\, e^y\, dy\, dx$. (1.5)

$\int_0^1 \int_0^1 x\, e^y\, dy\, dx$ का मूल्यांकन करें।

(f) State Green's theorem. (1.5)

ग्रीन का प्रमेय बताएं।

(g) Find the integrating factor for the differential equation (1.5)

$$2\cos x \frac{dy}{dx} + 4\sin x\ y = 0$$

विभेदक समीकरण के लिए एकीकृत कारक ज्ञात कीजिये

$$2\cos x \frac{dy}{dx} + 4\sin x\ y = 0$$

(h) Check if the following differential equation is exact: (1.5)

$$(y^2 + 2x^2y)dx + (2x^3 - xy)dy = 0$$

जाँचें कि क्या निम्न अंतर समीकरण सटीक है:

$$(y^2 + 2x^2y)dx + (2x^3 - xy)dy = 0$$

(i) What is Clairaut's type equation? Give an example. (1.5)

क्लेरौट प्रकार का समीकरण क्या है? एक उदाहरण दीजिए।

(j) Identify the nature of the singular points of the differential equation (1.5)
$x^2(x-2)y'' + (x-1)y' + 2xy = 0$

विभेदक समीकरण के एकवचन बिंदुओं की प्रकृति को पहचानिए
$x^2(x-2)y'' + (x-1)y' + 2xy = 0$

PART –B

Q2 (a) Test the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1})$ (8)

$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1})$ के अभिसरण का परीक्षण करें

(b) Using Taylor's series expansion, prove that (7)

$$\log_e(1+e^x) = \log_e 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots$$

टेलर की श्रृंखला विस्तार का उपयोग करते हुए, साबित करें कि

$$\log_e(1+e^x) = \log_e 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots$$

Q3 (a) If $z = f(x,y)$ where $x = u^2 - v^2, y = 2uv$, prove that (8)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 4(u^2+v^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

यदि $z = f(x,y)$ जहां $x = u^2 - v^2, y = 2uv$, साबित करें कि

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 4(u^2+v^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

(b) Find the minimum value of the function $x^2 + y^2 + z^2$ subject to the condition $xy + yz + zx = 3a^2$. (7)
$xy + yz + zx = 3a^2$ शर्त के अधीन फ़ंक्शन $x^2 + y^2 + z^2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

Q4 (a) Using Gauss divergence theorem, evaluate $\iint_S \vec{F}.\vec{n}\, dS$ where $\vec{F} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ and S is the surface of the cube bounded by the planes $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2, z = 0, z = 2$. (8)
गॉस विचलन प्रमेय का उपयोग करते हुए, $\iint_S \vec{F}.\vec{n}\, dS$ का मूल्यांकन करें जहां $\vec{F} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ है और S घन की सतह है जो $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2, z = 0, z = 2$ से घिरा हुआ है।

(b) Change the order of integration $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy\, dy\, dx$ and hence evaluate. (7)
एकीकरण $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy\, dy\, dx$ का क्रम बदलें और मूल्यांकन करें।

Q5 (a) Solve the differential equation $p^2 - p(e^x + e^{-x}) + 1 = 0$ where p has usual meaning. (8)
अंतर समीकरण $p^2 - p(e^x + e^{-x}) + 1 = 0$ को हल करें जहाँ p का सामान्य अर्थ है।

(b) Solve $(2x + y + 1)dy = (x + y + 1)dx$. (7)
हल करें $(2x + y + 1)dy = (x + y + 1)dx$

Q6 (a) Solve the following differential equation by using variation of parameter (8)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

पैरामीटर की भिन्नता का उपयोग करके निम्नलिखित अंतर समीकरण को हल करें

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

(b) Find the power series solution of $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ in powers of x. (7)

x की घात में $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ का घात श्रृंखला समाधान ज्ञात कीजिए।

Q7 (a) Solve $(D^4 - 1)y = e^x \cos x$. (8)

हल करें $(D^4 - 1)y = e^x \cos x$

(b) Find the directional derivative of $2yz + z^2$ in the direction of the vector $\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 2\bar{k}$ at the point (1, -1, 3). (7)

$\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 2\bar{k}$ वेक्टर की दिशा में $2yz + z^2$ का (1, -1, 3) बिंदु पर दिशात्मक व्युत्पन्न ज्ञात कीजिये।